УДК 519.2:303.732.4

01.00.00 Физико-математические науки

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОМЕХ, СОЗДАВАЕМЫХ ЭЛЕКТРОВОЗАМИ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Движение электровозов создает помехи, влияющие на проводные линии связи. Создание достаточно эффективных и в то же время экономичных средств защиты проводных линий связи от мешающих влияний, создаваемых тяговыми сетями переменного тока, предполагает в качестве подготовительного этапа разработку математических моделей помех, создаваемых электровозами. Разработана вероятностно-статистическая модель помех, создаваемых электровозами. Найдено асимптотическое распределение суммарной помехи, являющегося распределением длины двумерного случайного вектора, координаты которого - независимые нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями 0 и дисперсиями 1. Доказана предельная теорема для математического ожидания амплитуды суммарной помехи. Методом статистических испытаний (Монте-Карло) изучена скорость сходимости математического ожидания амплитуды суммарной помехи к предельному значению. Использовался алгоритм перемешивания Макларена-Марсальи (М-алгоритм). Проанализированы пять наборов амплитуд, выбранных в соответствии с рекомендациями специалистов в области тяговых сетей переменного тока. Наиболее быстрая сходимость к пределу имеет место в случае равенства амплитуд. Установлено, что максимально возможное среднее значение амплитуды случайной помехи на 7,4% меньше ранее использовавшегося значения, что сулит значительный экономический эффект

Ключевые слова: КОМПЬЮТЕРНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ, ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПОМЕХИ, ЭЛЕКТРОВОЗЫ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МОНТЕ-КАРЛО)

UDC 519.2:303.732.4

Physics and mathematical sciences

PROBABILISTIC-STATISTICAL MODELING THE INTERFERENCES FROM ELECTRIC LOCOMOTIVES

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

The movements of electric locomotives create the interferences affecting the wired link. The creation of sufficiently technical effective and at the same time cost-effective means of protection from wireline interferences generated traction networks assumes as a preparatory phase to develop mathematical models of interference caused by electric locomotives. We have developed a probabilistic-statistical model of interferences caused by electric locomotives. The asymptotic distribution of the total interference is the distribution of the length of the two-dimensional random vector whose coordinates - independent normally distributed random variables with mean 0 and variance 1. Limit theorem is proved for the expectation of the total amplitude of the interferences. Monte-Carlo method is used to study the rate of convergence of the expectation of the total amplitude of the interferences to the limiting value. We used an algorithm of mixing developed by MacLaren-Marsaglia (M-algorithm). Five sets of amplitudes are analyzed, selected in accordance with the recommendations of experts in the field of traction AC networks. The most rapid convergence to the limit takes place in the case of equal amplitudes. It was found that the maximum possible average value of the amplitude of the random noise by 7.4% less than the previously used value, which promises a significant economic impact

Keywords: COMPUTER-STATISTICAL METHODS, PROBABILISTIC-STATISTICAL MODELING, INTERFERENCES, ELECTRIC LOCOMOTIVES, LIMIT THEOREMS, MONTE-CARLO METHODS

1. Введение

В статье [1] проанализировано современное состояние основных компьютерно-статистических методов, выявлены достижения и имеющиеся проблемы, намечены перспективы дальнейшего движения, сформулированы задачи, которые следует решить. В этой статье обсуждаются методы статистических испытаний (Монте-Карло), датчики псевдослучайных чисел, имитационное моделирование, методы размножения выборок (бутстреп-методы), автоматизированный системно-когнитивный анализ. В качестве конкретного примера использования компьютерно-статистических методов при решении прикладных задач рассмотрим применение предельных теорем (теории вероятностей и математической статистики) и затем метода статистических испытаний (Монте-Карло) в рамках вероятностно-статистической модели помех, создаваемых электровозами. Использование полученных результатов в методиках защиты проводных линий связи сулит значительный экономический эффект.

2. Вероятностно-статистическая модель

Движение электровозов создает помехи, влияющие на проводные линии связи. Создание достаточно эффективных и в то же время экономичных средств защиты проводных линий связи от мешающих влияний, создаваемых тяговыми сетями переменного тока, предполагает в качестве подготовительного этапа разработку математических моделей помех, создаваемых электровозами.

Как показано в [2, с.59] (см. также [3, 4]), m-ю гармонику ($m \geq 7$) создаваемой электровозом помехи можно описать двумерным случайным вектором

$$(\xi_1, \xi_2) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,, \qquad (1)$$

где r – амплитуда и φ - фаза помехи, причем r и φ независимы (как случайные величины), распределение φ равномерно на $[0;2\pi]$. Как нетрудно подсчитать,

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_1^3) = M(\xi_2^3) = 0,\ D(\xi_1) = D(\xi_2) = \frac{1}{2}M(r^2)\,. \qquad (2)$$

В случае n электровозов рассматриваемая гармоника суммарной помехи описывается вектором (α_n, β_n), причем из физических соображений

$$(\alpha_n, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)\,. \qquad (3)$$

Каждый вектор в правой части (3) соответствует электровозу с тем же номером. Будем считать, что случайные величины $\{r_i, \varphi_i, i = 1,2,...,n\}$ независимы в совокупности, а все фазы φ_i распределены равномерно на $[0;2\pi]$. Из соотношений (2) и (3) вытекает, что

$$M(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \sum_{i=1}^{n} M(r_i^2)\,, \qquad (4)$$

если все слагаемые в правой части (4) существуют. Последнее будем считать выполненным, поскольку распределения реальных случайных величин полностью сосредоточены на конечных отрезках (финитны). Правую часть (4) обозначим R_n^2.

3. Предельные соотношения

Из многомерной центральной предельной теоремы (см., например, [5, п.4.2], [6]) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы Линдеберга - Феллера, в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{R_n^2}\max_{1\le i\le n} M(r_i^2)\right) = 0\,. \qquad (5)$$

Тогда для любых чисел x, y

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sqrt{2}}{R_n}\alpha_n < x;\ \frac{\sqrt{2}}{R_n}\beta_n < y\right\} = \Phi(x)\Phi(y)\,, \qquad (6)$$

где $\Phi(z)$ - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть ξ и η - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $\Phi(z)$. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть функция $f: R^2 \to R^1$ интегрируема по Риману по любому квадрату. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ f\left(\frac{\sqrt{2}}{R_n}\alpha_n,\ \frac{\sqrt{2}}{R_n}\beta_n\right) < u\right\} = P\{f(\xi,\eta) < u\} \qquad (7)$$

при всех u, при которых правая часть (7) непрерывна по u.

Доказательство вытекает из леммы 1 и результатов о наследовании сходимости (см., например, [5, п.4.3], [6]).

В методиках расчетов, связанных с защитой проводных линий связи, используется математическое ожидание амплитуды суммарной помехи (α_n, β_n). Следовательно, надо рассмотреть функцию

$$f(z,w) = \sqrt{z^2 + w^2}\ .$$

Из леммы 2 следует, что распределение нормированной амплитуды суммарной помехи

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{2}}{R_n}\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

сходится к распределению случайной величины

$$\delta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\ .$$

Случайная величина δ, как известно (см., например, [7, с.262]), имеет плотность

$$h(x) = x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},\ x \ge 0\,. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$M(\delta) = \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}26 .$$

При проектировании защиты проводных линий связи нормативные ограничения накладываются на математическое ожидание суммарной помехи. Поэтому для практического применения полезны следующие результаты.

Теорема 1. Пусть предельные соотношения (5), (6) имеют место и, кроме того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{R_n^4} \sum_{i=1}^{n} M(r_i^4) < +\infty . \qquad (9)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} M(\gamma_n) = M(\delta) .$$

Следствие. Для математического ожидания $M[|(\alpha_n, \beta_n)|]$ амплитуды суммарной помехи имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M[|(\alpha_n, \beta_n)|]}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} R_n} = 1 .$$

Отметим, что соотношения (5) и (9) выполнены, например, в случае, когда существуют числа $0 < r < R$ такие, что $r < r_{in} < R$ при всех n, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. амплитуды электровозов ограничены сверху и снизу. Это условие является весьма естественным с прикладной точки зрения.

Доказательство теоремы 1. При любом $a > 0$ справедливо равенство

$$M(\gamma_n) - M(\delta) = \left\{ \int_{|x|<a} x dP(\gamma_n < x) - \int_{|x|<a} x h(x) dx \right\} + \left\{ \int_{|x|\geq a} x dP(\gamma_n < x) - \int_{|x|\geq a} x h(x) dx \right\} . \quad (10)$$

Каждую из скобок в представлении (10) будем обрабатывать своим способом. Поскольку

$$\int_{-a}^{a} xdF(x) = xF(x)\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} F(x)dx\,, \qquad (11)$$

то, подставляя в (11) вместо $F(x)$ соответственно $P(\gamma_n < x)$ и $P(\delta < x)$, заключаем с помощью леммы 2, что при фиксированном значении a первая скобка в (10) стремится к 0 при росте n.

Вторую скобку оценим следующим образом:

$$\left| \int_{|x|\ge a} xdP(\gamma_n < x) - \int_{|x|\ge a} xh(x)dx \right| \le \int_{|x|\ge a} |\,x\,|\,dP(\gamma_n < x) + \int_{|x|\ge a} |\,x\,|\,h(x)dx\,. \qquad (11)$$

Из явного вида функции $h(x)$ (см. (8)) следует, что второе слагаемое в (11) стремится к 0 при росте n. Для оценки первого слагаемого в (11) воспользуемся соотношением

$$\int_{a}^{+\infty} xdF(x) = \int_{a}^{+\infty} xd(F(x)-1) = x(F(x)-1)\Big|_{a}^{+\infty} - \int_{a}^{+\infty} (F(x)-1)dx\,,$$

в котором положим $F(x)$ = $P(\gamma_n < x)$. Оценим сначала порядок убывания по x величины

$$1 - P(\gamma_n < x) = 1 - P\left(\frac{2}{R_n^2}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) < x^2 \right).$$

С помощью несложных, но достаточно продолжительных вычислений можно найти $M[(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2]$ и на основе неравенства (9) доказать, что существует константа C такая, что при всех n

$$M\left[\left(\frac{2}{R_n^2}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right)^2 \right] < C\,.$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева:

$$P\{|\,\xi\,| \ge b\} \le \frac{M(\xi^2)}{b^2}$$

для любой случайной величины ξ и любого положительного числа b, заключаем, что

$$P\left\{ \frac{2}{R_n^2}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \ge x^2 \right\} = 1 - P(\gamma_n < x) \le \frac{C}{x^4}\,.$$

Следовательно,

$$0 \le \int_a^{+\infty} xdP(\gamma_n < x) < \int_a^{+\infty} (1 - P(\gamma_n < x))dx \le \int_a^{+\infty} \frac{C}{x^4} dx = \frac{C}{3a^3}. \quad (12)$$

Из соотношений (11), (8) и (12) следует, что первое слагаемое в правой части равенства (10) при фиксированном a стремится к 0 при росте n, в то время как вторая скобка стремится к 0 при росте a равномерно по n. Для завершения доказательства теоремы 1 по фиксированному $\varepsilon > 0$ найдем число a такое, что при всех n вторая скобка меньше $\varepsilon/2$, а затем по этому a найдем n_0 такое, что при $n > n_0$ первая скобка также меньше $\varepsilon/2$. Тогда $|M(\gamma_n) - M(\delta)| < \varepsilon$ при $n > n_0$. Теорема 1 доказана.

4. Обсуждение предельных соотношений

Рассмотрим важный частный случай. Пусть амплитуды всех электровозов детерминированы, одинаковы и равны 1, т.е. $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по следствию из теоремы 1 математическое ожидание амплитуды суммарной помехи приблизительно равно $0{,}886\sqrt{n}$, в то время как формула (44) на с.60 электротехнической работы [2] дает $\sqrt{n}$. Таким образом, согласно развитой выше теории значение амплитуды суммарной помехи на 11,4% меньше, чем согласно мнению специалистов в этой области.

Чем же объясняется различие в 11,4% Дело в том, что «закон сложения высших гармоник в тяговой сети при двух электровозах в зоне питания» (формула (42) на с.60 работы [2]) является приближенным и выполняется с точностью порядка 1% (там же, с.59). Можно было бы ожидать, что при рассмотрении n электровозов, а не двух, ошибка будет порядка $0{,}01n$, однако в силу того, что рассматриваемый «закон» выполняется тем точнее, чем больше различаются амплитуды слагаемых, ошибка имеет порядок лишь $0{,}114\sqrt{n}$, что при больших n существенно меньше, чем $0{,}01n$.

Итак, формула (44) в работе [2] завышает среднюю амплитуду суммарной помехи в 1/0,886 $\approx$1,13 раза, что приводит к необходимости соответствующего увеличения средств, выделяемых на защиту проводных линий связи. Следовательно, внедрение развитой в настоящей статье теории позволит сэкономить достаточно большие материальные и финансовые ресурсы.

Однако приведенные выше результаты являются предельными, ими можно пользоваться при «достаточно большом» числе электровозов n. Для практики же наиболее интересны значения n в пределах от 2 до 10. Возникает вопрос о скорости сходимости в леммах 1 - 2 и особенно в теореме 1.

Пусть сначала n = 2. Нетрудно показать, что в случае детерминированных амплитуд r_1 и r_2

$$M[|(\alpha_n,\beta_n)|] = R_2 M\left(\sqrt{1+\gamma\cos\varphi}\right), \qquad (13)$$

где $R_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, фаза φ - равномерно распределенная на $[0;2\pi]$ случайная величина, а

$$\gamma = \frac{2r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Легко видеть, что при γ = 1 (т.е. при $r_1 = r_2$) математическое ожидание в правой части (13) равно 0,897. При γ < 1 соответствующий определенный интеграл приводится к эллиптическому интегралу и в явном виде не берется. Приведем разложение в ряд по степеням параметра γ:

$$M\left(\sqrt{1+\gamma\cos\varphi}\right) = \sum_{k\ge 0}\binom{0,5}{2k}2^{-2k}\binom{2k}{k}\gamma^{2k} = 1 - \frac{1}{16}\gamma^2 - \frac{15}{1024}\gamma^4 - \frac{105}{16384}\gamma^6 - \ldots$$

Вычисленное при n = 2 значение 0,897 весьма близко к предельному (при $n \to \infty$) значению 0,886. Поэтому можно ожидать быстрой сходимости, по крайней мере при малоразличающихся значениях амплитуд.

Обсудим применение теоретических методов изучения скорости сходимости. Общий план рассуждений таков. Асимптотическое разложение характеристической функции случайного вектора (α_n, β_n) начинается с члена порядка n^{-1} (в силу того, что третьи моменты координат вектора равны 0 согласно (2)). Путем обращения этого разложения можно найти асимптотическое разложение для плотности (аналог разложения Эджворта), которое также начинается с члена того же порядка n^{-1}. Последний шаг – подобно доказательству теоремы 1 может быть сделан переход к оценке интересующий нас разности

$$M(\gamma_n) - M(\delta) = O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (14)$$

Подробно обосновать описанную цепочку утверждений, приводящую к (14), и получить численные оценки скорости сходимости можно, оценивая остаточные члены во всех описанных выше преобразованиях (ряд подобных цепочек рассуждений рассмотрен в [8, гл.2]). К сожалению, не удалось обнаружить публикаций, в которых имелись бы нужные оценки. Это объясняется тем, что рассматриваемая ситуация является весьма частной с точки зрения общей теории. Мы не стали строить микротеорию для обоснования правдоподобных рассуждений, приведших к (14), поскольку нас интересует точность приближения предельным распределением при $2 \leq n \leq 10$, а, как показывает опыт анализа распределения двухвыборочной односторонней статистики Н.В. Смирнова (см. [5, п.4.7] и [9, 10]), константы, которые можно таким путем получить для уточнения (14), сильно завышены. Поэтому обратились к численным методам, а именно, к вычислительному эксперименту методом статистических испытаний (Монте-Карло), т.е. с использованием датчика псевдослучайных чисел.

5. Изучение скорости сходимости методом статистических испытаний

В соответствии с рекомендациями [11] использовался алгоритм перемешивания Макларена-Марсальи (М-алгоритм).

В табл.1 приведены значения оценок величины

$$\rho = \frac{M[|(\alpha_n, \beta_n)|]}{\sqrt{\sum_{1 \le i \le n} r_i^2}} - 0{,}886 \qquad (15)$$

для пяти наборов амплитуд [12], выбранных в соответствии с рекомендациями специалистов в области тяговых сетей переменного тока (см. ниже).

Таблица 1.

Оценка скорости сходимости в теореме 1 методом Монте-Карло

№ экс-пери-мента	Число электровозов n				
	1	2	3	4	5
1	1 -	1 0,009	1 0,018	1 0,010	1 0,013
2	0,40 -	0,41 0,016	0,72 0,029	0,64 0,021	1,18 0,022
3	0,40 -	0,40 0,010	0,41 0,022	0,86 0,030	0,80 0,016
4	0,40 -	0,53 0,031	2,52 0,095	0,72 0,077	0,85 0,067
5	0,40 -	0,41 0,014	0,85 0,041	0,56 0,017	0,82 0,017

Продолжение таблицы 1.

№ эксперимента	Число электровозов n				
	6	7	8	9	10
1	1 0,013	1 0,001	1 0,001	1 0,010	1 0,010
2	0,66 0,022	1,60 0,025	1,70 0,018	0,87 0,008	2,60 0,007
3	0,86 0,012	0,85 0,009	0,90 0,007	2,97 0,040	0,72 0,035
4	3,00 0,025	0,65 0,029	1,46 0,017	0,63 0,023	0,84 0,022
5	0,58 0,007	1,63 0,025	1,64 0,011	0,87 0,009	1,00 0,012

Примечание. Для каждого из пяти экспериментов верхняя строка – значения амплитуд, нижняя – значения ρ из (15), оцененные по 10 000 испытаниям. В каждом наборе из 10 амплитуд сначала моделируется ситуация с первыми двумя амплитудами, потом – с первыми тремя, затем – с первыми четырьмя, и т.д.

Математические ожидания в (15) оценивались как средние арифметические 10000 наблюдений случайной величины $|(\alpha_n, \beta_n)|$. Дисперсия результата одного испытания согласно лемме 2, аналогу теоремы 1 для вторых моментов и соотношению (8) оценивается как $D(\delta)/2 \approx 0{,}22$, а потому среднеквадратическое отклонение табличных значений оценивается как 0,0015 (в предположении идеальности датчика псевдослучайных чисел).

Данные табл.1 показывают, что наиболее быстрая сходимость в теореме 1 имеет место в случае равенства амплитуд. Напротив, если значение одной из амплитуд безгранично возрастает, а значения остальных фиксированы, то $\rho \to 0{,}114$. С целью изучения сходимости в случае различных амплитуд были взяты четыре независимые выборки значений амплитуд из распределения, заданного гистограммой для 9-й гармоники на рис.17 в монографии Р.Н. Карякина [2, с.40]. Объемы выборок – 10 наблюдений. Выборки приведены в табл.1. В каждом случае рассчитаны оценки ρ для первых m элементов выборки, m = 2, 3, …, 10. Таким образом, табличные значения одной строки зависимы между собой, но строки независимы.

Из табл.1 видно, что существенные различия между амплитудами приводят к возрастанию ρ, однако при росте числа электровозов n это возрастание становится все менее существенным. Так, для $n \geq 6$ максимальное табличное значение равно 0,040, т.е. при $n \geq 6$ имеем основания полагать, что

$$M[|(\alpha_n, \beta_n)|] \leq 0{,}926\sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} r_i^2} \qquad (16)$$

для подавляющего большинства реальных ситуаций. Замена 1 на 0,926 (т.е. снижение на 7,4%) в методиках защиты проводных линий связи сулит значительный экономический эффект. Кроме (16), данные табл.1 позволяют дать ряд других полезных практических рекомендаций.

Замечание. Предположение о равномерности распределения фазы φ использовалось выше лишь при выводе соотношений (2) и (13). Поэтому все результаты настоящей работы, кроме равенства (13), справедливы для любых распределений фаз, удовлетворяющих соотношениям (2). В частности, для различных электровозов распределения могут быть различными.

Автор искренне благодарен Р.Н. Карякину за обсуждение проблем защиты проводных линий связи от мешающих влияний, создаваемых электровозами, и вопросов разработки соответствующей вероятностно-

статистической модели, и С.Ю. Адамову за разработку программного обеспечения и проведение расчетов в соответствии с методом статистических испытаний.

Литература

1. Орлов А.И. Компьютерно-статистические методы: состояние и перспективы / А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №09(103). С. 163 – 195. – IDA [article ID]: 1031409012. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/09/pdf/12.pdf

2. Карякин Р.Н. Резонанс в тяговых сетях и его демпфирование. – М.: Высшая школа, 1961. – 231 с.

3. Карякин Р.Н. Тяговые сети переменного тока: 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1987. - 279 с.

4. Карякин Р.Н. Нормативные основы устройства электроустановок. - М.: Энергосервис, 1998. - 237 с.

5. Орлов А.И. Прикладная статистика. - М.: Экзамен, 2006. - 671 с.

6. Орлов А.И. Теоретические инструменты статистических методов / А.И. Орлов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №07(101). С. 253 – 274. – IDA [article ID]: 1011407014. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/07/pdf/14.pdf

7. Крамер Г. Математические методы статистики: 2-е изд. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

8. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М.: Наука, 1979. - 296 с.

9. Орлов А.И., Орловский И.В. Оценка остаточного члена порядка n^{-2} для функции распределения двухвыборочной статистики Смирнова // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. – Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1978. - С.100-109.

10. Orlov A.I., Orlovskii I.V. Error Term Estimate on Second Order for the Distribution Function of Smirnov's Two-Sample Statistics // Journal of soviet Mathematics. 1988. V.40. №2. P.214-220.

11. Тюрин Ю.Н., Фигурнов В.Э. О проверке датчиков псевдослучайных чисел // Заводская лаборатория. 1990. Т.56. №3. С.89-92.

12. Карякин Р.Н., Орлов А.И., Адамов С.Ю. Вероятностная теория высших гармоник помех, создаваемых электровозами // Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике, т.33. - М.: Наука, 1978. - С.376-380.

References

1. Orlov A.I. Komp'juterno-statisticheskie metody: sostojanie i perspektivy / A.I. Orlov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №09(103). S. 163 – 195. – IDA [article ID]: 1031409012. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/09/pdf/12.pdf

2. Karjakin R.N. Rezonans v tjagovyh setjah i ego dempfirovanie. – M.: Vysshaja shkola, 1961. – 231 s.
3. Karjakin R.N. Tjagovye seti peremennogo toka: 2-e izd., pererab. i dop. – M.: Transport, 1987. - 279 s.
4. Karjakin R.N. Normativnye osnovy ustrojstva jelektroustanovok. - M.: Jenergoservis, 1998. - 237 s.
5. Orlov A.I. Prikladnaja statistika. - M.: Jekzamen, 2006. - 671 s.
6. Orlov A.I. Teoreticheskie instrumenty statisticheskih metodov / A.I. Orlov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2014. – №07(101). S. 253 – 274. – IDA [article ID]: 1011407014. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2014/07/pdf/14.pdf
7. Kramer G. Matematicheskie metody statistiki: 2-e izd. – M.: Mir, 1975. – 648 s.
8. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-jekonomicheskih modeljah. - M.: Nauka, 1979. - 296 s.
9. Orlov A.I., Orlovskij I.V. Ocenka ostatochnogo chlena porjadka n-2 dlja funkcii raspredelenija dvuhvyborochnoj statistiki Smirnova // Statisticheskie metody ocenivanija i proverki gipotez. Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. – Perm': Izd-vo Permskogo gosudarstvennogo universiteta, 1978. - S.100-109.
10. Orlov A.I., Orlovskii I.V. Error Term Estimate on Second Order for the Distribution Function of Smirnov's Two-Sample Statistics // Journal of soviet Mathematics. 1988. V.40. №2. P.214-220.
11. Tjurin Ju.N., Figurnov V.Je. O proverke datchikov psevdosluchajnyh chisel // Zavodskaja laboratorija. 1990. T.56. №3. S.89-92.
12. Karjakin R.N., Orlov A.I., Adamov S.Ju. Verojatnostnaja teorija vysshih garmonik pomeh, sozdavaemyh jelektrovozami // Prikladnoj mnogomernyj statisticheskij analiz. Uchenye zapiski po statistike, t.33. - M.: Nauka, 1978. - S.376-380.